Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Mobile und Verteilte Systeme
Prof. Dr. Linnhoff-Popien

Übungsblatt 5
Rechnerarchitektur im SoSe 2021

Zu den Modulen D, F, H

Abgabetermin: 16.05.2021 16:00 Uhr

Besprechung: Besprechung der Übungsaufgaben in den Übungsgruppen vom 17. – 21. Mai 2021

Aufgabe 1: (H) NAND/NOR

(6 Pkt.)

Die beiden Mengen {NAND} und {NOR} von Booleschen Funktionen sind funktional vollständig, d.h. dass sich durch die Kombination von NAND- bzw. NOR-Funktionen jede beliebige Boolesche Funktion darstellen lässt. Dies ermöglicht es, NAND- bzw. NOR-Gatter kostengünstig in Massenproduktion herzustellen und daraus beliebige digitale Schaltungen aufzubauen.

NAND

i	a	b	$\overline{a \cdot b} = a \text{ NAND } b$
0	0	0	1
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0

NOR

i	a	b	$\overline{a + b} = a \text{ NOR } b$
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	0

Stellen Sie die elementaren Booleschen Funktionen AND, OR und NOT unter ausschließlicher Verwendung von

a. NAND-Gattern

b. NOR-Gattern

dar!

Aufgabe 2: (H) PLA-Entwurf

(8 Pkt.)

In der Vorlesung haben Sie das Konzept von programmierbaren logischen Arrays (PLAs) kennen gelernt.
Wenn man in einem PLA die Anordnung der Bausteine so vornimmt, dass in der oberen Hälfte nur Bausteine vom Typ 0, 2 oder 3 und in der unteren Hälfte nur Bausteine vom Typ 0 oder 1 exisitieren – man das PLA also in eine Und- und eine Oder-Ebene unterteilen kann – spricht man auch von einem *normierten PLA*.
Gegeben sei die folgende Boolesche Funktion $f : B^3 \to B^2$

$$f(a, b, c) = (a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}, c + a \cdot \overline{b})$$

Realisieren Sie diese Funktion durch ein normiertes PLA, welches aus der minimal möglichen Anzahl an Zeilen und Spalten besteht. Verwenden Sie ausschließlich Bausteine der Typen 0 bis 3. Kennzeichnen Sie in Ihrer Skizze die Und- und die Oder-Ebene. Markieren Sie gesperrte und neutralisierte Eingänge. Beschriften Sie jeden Pfeil (sowohl ausgehende als auch die innerhalb des PLAs) mit der jeweils anliegenden logischen Funktion.

Aufgabe 3: (H) Quine-McCluskey

(9 Pkt.)

a. Vereinfachen Sie den folgenden Booleschen Term unter Anwendung des Algorithmus von Quine-McCluskey:
   $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + \overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + x_1\overline{x}_2x_3x_4 + x_1x_2\overline{x}_3x_4 + x_1x_2x_3\overline{x}_4$

   Geben Sie dabei alle notwendigen Schritte an!

b. Berechnen Sie die Kosten K_1 vor und K_2 nach der Optimierung. Wie viel kann an Kosten eingespart werden? Gehen Sie davon aus, dass die Gatter AND, OR und NOT jeweils Kosten von 1 verursachen.

c. Begründen Sie, ob in diesem Beispiel auch eine Optimierung mittels Karnaugh-Diagrammen möglich wäre.

Aufgabe 4: (H) Einfachauswahlaufgabe: Boolesche Algebra

(5 Pkt.)

Für jede der folgenden Fragen ist eine korrekte Antwort auszuwählen („1 aus n“). Nennen Sie dazu in Ihrer Abgabe explizit die jeweils ausgewählte Antwortnummer ((i), (ii), (iii) oder (iv)). Eine korrekte Antwort ergibt jeweils einen Punkt. Mehrfache Antworten oder eine falsche Antwort werden mit 0 Punkten bewertet.

<table>
<tr><td colspan="4">a) Bei welcher Belegung (x_1, x_2, x_3, x_4) ergibt die Boolesche Funktion
$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})} \vee \overline{x_4}$ den Wert 1?</td></tr>
<tr><td>(i) $(0, 1, 1, 0)$</td><td>(ii) $(0, 0, 1, 1)$</td><td>(iii) $(0, 1, 0, 1)$</td><td>(iv) $(1, 0, 0, 0)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">b) Welche der folgenden Wertetabellen beschreibt die NOR-Funktion ($y = \overline{a + b}$)?</td></tr>
<tr>
<td>(i)
<table><tr><th>a</th><th>b</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td>
<td>(ii)
<table><tr><th>a</th><th>b</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td>
<td>(iii)
<table><tr><th>a</th><th>b</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td>
<td>(iv)
<table><tr><th>a</th><th>b</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td>
</tr>
<tr><td colspan="4">c) Eine Funktion $f : B^n \to B$ heißt n–stellige Boolesche Funktion ($B = \{0, 1\}$). Wie viele n–stellige Boolesche Funktionen gibt es für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$?</td></tr>
<tr><td>(i) 2^n</td><td>(ii) 2^{2^n}</td><td>(iii) $2 \cdot 2^n$</td><td>(iv) $2^{2 \cdot n}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">d) Wie wird die Anzahl der benötigten Steuereingänge s für einen n-Eingaben Multiplexer berechnet?</td></tr>
<tr><td>(i) $s = n$</td><td>(ii) $s = 2 * n$</td><td>(iii) $s = \log_2 n$</td><td>(iv) $s = \lceil \log_2 n \rceil$</td></tr>
<tr><td colspan="4">e) Ein Encoder besitzt die umgekehrte Funktionalität bezüglich eines Decoders. Angenommen ein Encoder hat 2^n Eingänge, von denen zu jedem Zeitpunkt genau einer mit einer 1 belegt ist. Wie viele Ausgänge muss der Encoder zur Umsetzung seiner Funktionalität besitzen?</td></tr>
<tr><td>(i) $2 \cdot n$</td><td>(ii) 2^n</td><td>(iii) n</td><td>(iv) $\frac{2^n}{2}$</td></tr>
</table>