

## Übungsblatt 5

### Rechnerarchitektur im SS 22

Zu den Modulen C, D, F, G, H

**Abgabetermin:** 29.05.2022, 18:00 Uhr

**Besprechung:** T-Aufgaben: 30.05.22 - 03.06.22, H-Aufgaben 06.06.22 - 10.06.22

#### Aufgabe 30: (T) Boolesche Aussagen

(- Pkt.)

In dieser Aufgabe sind Beispiele für aussagenlogische Ausdrücke  $z = f(x, y)$  gegeben. Stellen Sie für jedes Beispiel die Wahrheitstabelle auf und ordnen Sie dem Beispiel eine der 16 zweistelligen Boolesche Funktionen von Seite 52 des Skriptes zu! Entscheiden Sie zudem, ob es günstiger wäre, die Funktion in DNF oder KNF anzugeben und geben Sie die jeweilige DNF oder KNF an!

- x bedeutet: Es regnet.  
y bedeutet: Ich habe einen Schirm dabei.  
z bedeutet: Ich kann nach draußen gehen ohne nass zu werden.
- x bedeutet: Es ist ein Gang eingelegt (die Kupplung soll nicht beachtet werden).  
y bedeutet: Das Gaspedal wird betätigt.  
z bedeutet: Das Fahrzeug bewegt sich nach vorn.
- x bedeutet: Es ist nicht windig.  
y bedeutet: Die Sonne scheint.  
z bedeutet: Ich kann einen Drachen steigen lassen.
- x bedeutet: Der Zug kommt zu spät.  
y bedeutet: Es steht ein Taxi als Alternativverbindung zur Verfügung.  
z bedeutet: Ich komme zu spät zu meinem Termin.
- x bedeutet: Team X zieht am Tau.  
y bedeutet: Team Y zieht am Tau.  
z bedeutet: Es gewinnt eines der Teams (beide sind gleich stark) beim Tauziehen.

## Aufgabe 31: (T) Encoder

(- Pkt.)

Ein Encoder besitzt die umgekehrte Funktionalität eines Dekoders. Er besitzt 4 Eingänge  $I_0, I_1, I_2, I_3$  und die zwei Ausgänge  $Out_0$  und  $Out_1$ . Es wird angenommen, dass stets genau einer der Eingänge mit einer 1 belegt ist. Ist ein Eingang  $I_j$  mit einer 1 belegt, so ist  $(Out_1, Out_0)$  die duale Darstellung der Dezimalzahl  $j$ . Bearbeiten Sie dazu folgende Teilaufgaben:

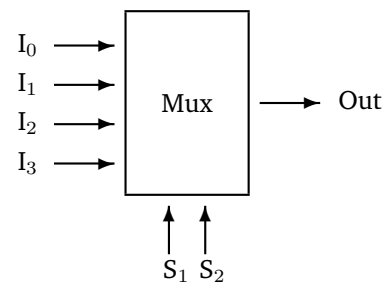
- Bestimmen Sie die Schaltfunktion des 4-zu-2-Encoders. Verwenden Sie dabei die Bezeichnungen gemäß der obigen Beschreibung.
- Zeichnen Sie das Schaltnetz eines 4-zu-2-Encoders gemäß der obigen Beschreibung eines 4-zu-2-Encoders! *Hinweis:* Die Erstellung der zugehörigen Wahrheitstabelle kann hierbei hilfreich sein.

## Aufgabe 32: (T) Multiplexer

(- Pkt.)

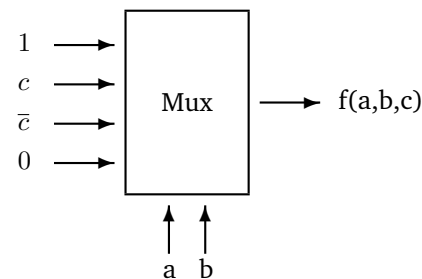
Für einem 4-Eingaben-Multiplexer gilt folgende verkürzte Funktionstabelle:

$S_1$	$S_2$	Out
0	0	$I_0$
0	1	$I_1$
1	0	$I_2$
1	1	$I_3$



Mit Hilfe eines 4-Eingaben-Multiplexers kann die Boolesche Funktion  $f(a, b, c)$  dargestellt werden, indem dessen Eingänge bzw. Steuerleitungen wie folgt belegt werden.

	$a$	$b$	$c$	$f(a, b, c)$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0



Geben Sie analog zum Beispiel eine Belegung der Eingänge eines 4-Eingaben-Multiplexers ( $I_0, \dots, I_3$ ) sowie der Steuerleitungen  $S_1$  und  $S_2$  an, so dass dieser die Boolesche Funktion

$$g(a, b, c) = (\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}) + (\bar{a} \cdot b \cdot \bar{c}) + (\bar{a} \cdot b \cdot c) + (a \cdot \bar{b} \cdot c) + (a \cdot b \cdot c)$$

realisiert.

Sie dürfen ausschließlich die Werte  $a, b, c, \bar{c}$  sowie 0 und 1 benutzen. Es dürfen keine weiteren Bausteine oder Gatter verwendet werden.

**Aufgabe 33: (T) Resolutionsregel**

(- Pkt.)

Vereinfachen Sie den folgenden Booleschen Term unter Anwendung der Resolutionsregel soweit wie möglich:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3x_4 + x_1x_2x_3x_4$$

Geben Sie dabei **alle** notwendigen Zwischenschritte an!

**Aufgabe 34: (H) NAND/NOR**

(6 Pkt.)

Die beiden Mengen {NAND} und {NOR} von Boolesche Funktionen sind funktional vollständig, d.h. dass sich durch die Kombination von NAND- bzw. NOR-Funktionen jede beliebige Boolesche Funktionen darstellen lässt. Dies ermöglicht es, NAND- bzw. NOR-Gatter kostengünstig in Massenproduktion herzustellen und daraus beliebige digitale Schaltungen aufzubauen.

NAND				NOR			
<i>i</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	$\overline{a \cdot b} = a \text{ NAND } b$	<i>i</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	$\overline{a + b} = a \text{ NOR } b$
0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	0
2	1	0	1	2	1	0	0
3	1	1	0	3	1	1	0

Stellen Sie die elementaren Booleschen Funktionen AND, OR und NOT unter ausschließlicher Verwendung von NAND- bzw. NOR-Gattern dar!

**Aufgabe 35: (H) PLA-Entwurf**

(8 Pkt.)

In der Vorlesung haben Sie das Konzept von programmierbaren logischen Arrays (PLAs) kennen gelernt.

Wenn man in einem PLA die Anordnung der Bausteine so vornimmt, dass in der oberen Hälfte nur Bausteine vom Typ 0, 2 oder 3 und in der unteren Hälfte nur Bausteine vom Typ 0 oder 1 existieren – man das PLA also in eine Und- und eine Oder-Ebene unterteilen kann – spricht man auch von einem *normierten PLA*.

Gegeben sei die folgende Boolesche Funktion  $f : B^3 \rightarrow B^2$

$$f(a, b, c) = (a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}, c + a \cdot \bar{b})$$

Realisieren Sie diese Funktion durch ein normiertes PLA, welches aus der minimal möglichen Anzahl an Zeilen und Spalten besteht. Verwenden Sie ausschließlich Bausteine der oben dargestellten Typen 0 bis 3. Kennzeichnen Sie in Ihrer Skizze die Und- und die Oder-Ebene. Markieren Sie gesperrte und neutralisierte Eingänge. Beschriften Sie jeden Pfeil (sowohl ausgehende als auch die innerhalb des PLAs) mit der jeweils anliegenden logischen Funktion.

### Aufgabe 36: (H) Quine-McCluskey

(9 Pkt.)

- Vereinfachen Sie den folgenden Booleschen Term unter Anwendung des Algorithmus von Quine-McCluskey:  
 $f(x) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3x_4$   
 Geben Sie dabei alle notwendigen Schritte an!
- Berechnen Sie die Kosten  $K_1$  vor und  $K_2$  nach der Optimierung. Wie viel kann an Kosten eingespart werden? Gehen Sie davon aus, dass die Gatter AND, OR und NOT jeweils Kosten von 1 verursachen.
- Begründen Sie, ob in diesem Beispiel auch eine Optimierung mittels Karnaugh-Diagrammen möglich wäre.

### Aufgabe 37: (H) Einfachauswahlaufgabe: Boolesche Algebra

(5 Pkt.)

Für jede der folgenden Fragen ist eine korrekte Antwort auszuwählen („1 aus n“). Nennen Sie dazu in Ihrer Abgabe explizit die jeweils ausgewählte Antwortnummer ((i), (ii), (iii) oder (iv)). Eine korrekte Antwort ergibt jeweils einen Punkt. Mehrfache Antworten oder eine falsche Antwort werden mit 0 Punkten bewertet.

a) Bei welcher Belegung $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ergibt die Boolesche Funktion $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \vee \bar{x}_4$ den Wert 1?																																																															
(i) (0, 1, 1, 0)	(ii) (0, 0, 1, 1)	(iii) (0, 1, 0, 1)	(iv) (1, 0, 0, 0)																																																												
b) Bei welcher Belegung $(a, b)$ ergibt der NOR-Operator ( $\downarrow$ ) den Wert 1?																																																															
(i) (1, 1)	(ii) (0, 0)	(iii) (0, 1)	(iv) (1, 0)																																																												
c) Welche der folgenden Wertetabellen beschreibt die NOR-Funktion ( $y = \overline{a + b}$ )?																																																															
(i)	(ii)	(iii)	(iv)																																																												
<table border="1"> <tr><th>a</th><th>b</th><th>y</th></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	a	b	y	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	<table border="1"> <tr><th>a</th><th>b</th><th>y</th></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	a	b	y	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	<table border="1"> <tr><th>a</th><th>b</th><th>y</th></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	a	b	y	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	<table border="1"> <tr><th>a</th><th>b</th><th>y</th></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	a	b	y	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
a	b	y																																																													
0	0	1																																																													
0	1	1																																																													
1	0	0																																																													
1	1	0																																																													
a	b	y																																																													
0	0	1																																																													
0	1	0																																																													
1	0	0																																																													
1	1	0																																																													
a	b	y																																																													
0	0	1																																																													
0	1	1																																																													
1	0	1																																																													
1	1	0																																																													
a	b	y																																																													
0	0	1																																																													
0	1	1																																																													
1	0	1																																																													
1	1	1																																																													
d) Welche der folgenden Wertetabellen beschreibt die NAND-Funktion ( $y = \overline{a \cdot b}$ )?																																																															
(i)	(ii)	(iii)	(iv)																																																												
<table border="1"> <tr><th>a</th><th>b</th><th>y</th></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	a	b	y	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	<table border="1"> <tr><th>a</th><th>b</th><th>y</th></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	a	b	y	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	<table border="1"> <tr><th>a</th><th>b</th><th>y</th></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	a	b	y	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	<table border="1"> <tr><th>a</th><th>b</th><th>y</th></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	a	b	y	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
a	b	y																																																													
0	0	1																																																													
0	1	0																																																													
1	0	0																																																													
1	1	0																																																													
a	b	y																																																													
0	0	1																																																													
0	1	1																																																													
1	0	0																																																													
1	1	0																																																													
a	b	y																																																													
0	0	1																																																													
0	1	1																																																													
1	0	1																																																													
1	1	0																																																													
a	b	y																																																													
0	0	1																																																													
0	1	1																																																													
1	0	1																																																													
1	1	1																																																													

e) Ein Encoder besitzt die umgekehrte Funktionalität bezüglich eines Decoders. Angenommen ein Encoder hat  $2^n$  Eingänge, von denen zu jedem Zeitpunkt genau einer mit einer 1 belegt ist. Wie viele Ausgänge muss der Encoder zur Umsetzung seiner Funktionalität besitzen?

(i) $2 \cdot n$	(ii) $2^n$	(iii) $n$	(iv) $\frac{2^n}{2}$